**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**
**ІНСТИТУТ ІННОВАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І ЗМІСТУ ОСВІТИ**
**03035, м. Київ, вул. Урицького, 36**

**Від 24.05.2012 № 14.1/10-1507**
**На №_______ від___________**

Ректорам (директорам) інститутів
післядипломної педагогічної освіти

Про проведення фінального етапу
XV Всеукраїнського турніру
юних математиків імені М. Й. Ядренка

Повідомляємо, що фінальний етап XV Всеукраїнського турніру юних математиків імені проф. М. Й. Ядренка планується провести у жовтні-листопаді 2012 року. Турнір буде проведено відповідно до вимог «Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності» (зі змінами), затвердженого наказом Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України від 22 вересня 2011 р. № 1009, зареєстрованого в Міністерстві юстиції України 17 листопада 2011 р. за № 1318/20056.

Отримати інформацію щодо умов участі у фінальному етапі XV Всеукраїнського турніру юних математиків можна за тел. 067-68-28-539, Кремінський Борис Георгійович, або на офіційній web-сторінці ТЮМу www.ukrtym.blogspot.com.

Завдання, що пропонуються для І етапу турніру (міжшкільних, районних, міських, обласних змагань), додаються.

Заступник директора Ю. І. Завалевський

Кремінський Б. Г.
т. 067-68-28-539

Додаток до листа
Інституту інноваційних технологій і змісту освіти МОНмолодьспорту України
№ 14.1/10-1507 від 24.05.2012 р.

**Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України**
**Інститут інноваційних технологій і змісту освіти**

# XV ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М. Й. ЯДРЕНКА

## Завдання для відбірних етапів турніру[*]

*Дорогі друзі — юні шанувальники математики! Деякі із задач, що пропонуються нижче, досить складні і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У певних ситуаціях вашій команді буде варто поставити й розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної «боротьби», оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру (нехтування ж можливостями узагальнення інколи призводить до втрати балів).*

*Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!*

1. «***Рівняння з цілими частинами***».

Для кожного значення параметра $a \in [0;2]$ розв'яжіть рівняння $[a \sin x] = [a \cos x]$, де $[u]$ — ціла частина числа $u$, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує $u$.

2. «***Відновіть трикутник***».

На дошці зобразили такий трикутник $ABC$, що $AB + AC = 2BC$. У цьому трикутнику провели бісектриси $AL_1$, $BL_2$ і $CL_3$, після чого все витерли, окрім точок $L_1$, $L_2$ і $L_3$. За допомогою циркуля та лінійки відновіть трикутник $ABC$.

3. «***Гра в кульки***».

На столі лежать дві купки кульок, у першій з яких $m$ кульок, у другій — $n$. За один хід можна з одної з купок прибрати одну, дві або три кульки. Іванко та Марійка роблять ходи по черзі, Марійка ходить першою. Виграє той, хто робить останній хід (тобто після ходу якого на столі взагалі не залишається кульок). Хто з гравців може забезпечити собі перемогу в цій грі (у залежності від $m$ і $n$)? Опишіть виграшну стратегію.

4. «***Розклад на множники***».

Доведіть, що число $\underbrace{44...4}_{2012}\underbrace{88...8}_{2010}53$ є складеним. Подайте це число у вигляді добутку двох натуральних чисел так, щоб модуль різниці отриманих множників був найменшим можливим.

---

[*] Для проведення міжшкільних, районних, міських та обласних етапів турніру відповідні журі й оргкомітети можуть частково змінювати запропонований перелік задач.

5. «***Про кількість розв'язків діофантового рівняння***».

Для цілого невід'ємного числа $n$ і натурального $m$ позначимо через $S_m(n)$ кількість усіх розв'язків рівняння $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 = n$ у цілих числах $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (розв'язки $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ та $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ вважаються однаковими тоді й тільки тоді, коли $u_k = v_k$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, m$). Знайдіть суму

$$\sum_{i=-\left[\sqrt{n}\right]}^{\left[\sqrt{n}\right]} \left(n - (m+1)i^2\right) S_m\left(n - i^2\right).$$

6. «***Обернення неперервності***».

6.1. Про функцію $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ відомо, що вона є взаємно однозначним відображенням (*бієкцією*) множини всіх цілих чисел на себе, причому $f(n) \to +\infty$, якщо $n \to +\infty$. Нехай $f^{-1}$ позначає функцію, обернену до $f$. Чи можна стверджувати, що $f^{-1}(n) \to +\infty$, якщо $n \to +\infty$?

6.2. Про функцію $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ відомо, що вона є бієкцією множини всіх дійсних чисел на себе, і є розривною в кожній точці числової прямої. Чи можна стверджувати, що й обернена до неї функція $F^{-1}$ також є розривною в кожній точці числової прямої?

7. «***Групи чисел***».

Чи можна числа $1, 2, 3, \ldots, 10^9 - 1$ розбити на 10 груп так, щоб сума восьмих степенів чисел у кожній групі була одна й та сама?

8. «***Тригонометричний многочлен***».

Яку найменшу кількість нулів на сегменті $[-\pi; \pi]$ може мати функція вигляду

$$T(x) = a_{2012} \cos^3 2012x + a_{2011} \cos^3 2011x + \ldots + a_{15} \cos^3 15x$$

(тут $a_{15}$, $a_{16}$, ..., $a_{2012}$ — деякі дійсні числа)?

9. «***Стильне облицювання***».

Нехай $m$, $n$ і $k$ — натуральні числа. Внутрішню поверхню душової кімнати, яка утворює собою прямокутний паралелепіпед розміром $m \times n \times k$, було замовлено облицювати без «прогалин» (тобто стіни, підлогу, стелю й навіть двері) плиткою. Майстер-плиточник має чорні та білі плитки розміром $1 \times 1$ і вважає облицювання *стильним*, якщо використана найбільша можлива кількість чорних плиток так, аби жодні дві з них не дотикалися між собою сторонами (дотик кутами дозволяється, різати плитки не можна). Позначимо через $F(m, n, k)$ кількість чорних плиток, яка потрібна для стильного облицювання душової кімнати.

9.1. Знайдіть $F(5, 5, 5)$ та $F(2012, 15, 15)$.

9.2. Дослідіть величину $F(m, n, k)$.

10. **«*Оцінка суми*»**.

Нехай $x_1$, $x_2$, $\dots$, $x_n$ — довільні дійсні числа, причому $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 0$. Доведіть, що

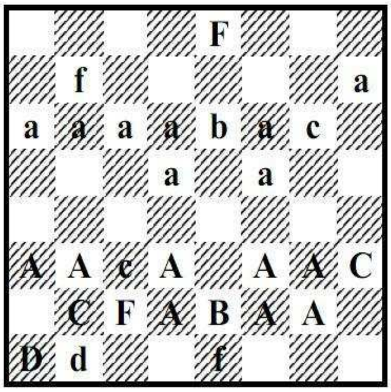
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \left( n - 1 + \left( 1 - 2\left\{ \frac{1}{2} n (1 - \mu) \right\} \right)^2 \right) \cdot \max_{1 \leq i \leq n} x_i^2 ,$$

де $\mu = \dfrac{1}{n \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $\{u\} = u - [u]$ — дробова частина числа $u$.

11. **«*Спільна дотична*»**.

Нехай $E$ — довільна точка сторони $BC$ квадрата $ABCD$. Доведіть, що вписані кола трикутників $ABE$, $ADE$ і $CDE$ мають спільну дотичну.

12. «***Шаховий ребус***».




На діаграмі зображено позицію, яка могла б трапитися в шаховій партії. Білі фігури зашифровано великими літерами, а чорні — малими (усього 14 білих і 14 чорних фігур). Фігури однакового типу зашифровано однаковими буквами: наприклад, **X** — білий король, **x** — чорний король. Розшифруйте позицію.

13. **«*Суми та біноміальні коефіцієнти*»**.

Нехай $k$ — задане натуральне число.

13.1. Знайдіть такі дійсні числа $A_0(k)$, $A_1(k)$, $\dots$, $A_k(k)$, що для всіх допустимих дійсних значень $x$ справджується рівність

$$\frac{k!}{x(x+1)\cdot \ldots \cdot (x+k)} = \frac{A_0(k)}{x} + \frac{A_1(k)}{x+1} + \ldots + \frac{A_k(k)}{x+k}.$$

13.2. Для натуральних $n \geq 2k$ знайдіть суму $S_n(k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i C_{i+k}^{k}}$.

13.3. Доведіть існування границі $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(k)$ та знайдіть її значення.

14. **«*Правильний тетраедр*»**.

Чи можливо правильний тетраедр розрізати на декілька правильних тетраедрів?

15. «***Надстепені та цікава функція***».

Для заданого натурального $n$ розглядаються всілякі числа вигляду $a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_k}}}}}$, де $1 \leq k \leq n$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$, $a_i \in \mathbf{N}$, $1 \leq i \leq k$. Позначимо через $g(n)$ найбільше серед таких чисел: $g(1) = 1$, $g(2) = 2$, $g(3) = 3$, $g(4) = 4$, $g(5) = 9$, $g(6) = 27$, $g(7) = 512$, і т. д. Знайдіть $g(n)$. (Нагадаємо, що для додатних чисел $a$, $b$ і $c$ за означенням $a^{b^c} = a^{(b^c)}$. Наприклад, $2^{3^2} = 2^9 = 512$.)

16. «***Надстепені та подільність***».

16.1. Нехай $k$ — задане натуральне число. Знайдіть $D_k$ — найбільший спільний дільник усіх чисел вигляду $m^{m^m} - m^m$, де $m \in \mathbf{N}$, $m \geq k$.

16.2. Для заданого натурального $a$ розглянемо послідовність $\{u_n(a)\}_{n \geq 1}$: $u_1(a) = a$, $u_{n+1}(a) = a^{u_n(a)}$, $n \geq 1$. Доведіть, що для довільного $a \in \mathbf{N}$ $w_n(a) = u_n(a) - u_{n-1}(a)$ ділиться без остачі на $n!$ для всіх натуральних $n \geq 2$.

17. «***Функціональне рівняння***».

Для натурального $k$ знайдіть усі такі функції $f:(0;+\infty) \to (0;+\infty)$, що для будь-яких додатних чисел $x_1$, $x_2$, …, $x_{2k}$, добуток котрих дорівнює 1, виконується рівність

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})}{x_{2i-1} + x_{2i}} = 1.$$

18. «***Рівень життя та політичні технології***».

Політтехнологи президента країни Олімпії отримали завдання переконати виборців щодо монотонного покращення ситуації в країні впродовж останніх 5 років його перебування при владі. Для цього політтехнологам надали заповнену натуральними числами таблицю розміром $3 \times 5$ з економічними показниками $P$, $Q$ і $R$ за останні 5 років. Політтехнологи мають право будь-які числа таблиці (у тому числі — жодного або ж усі) збільшити на одиницю, після чого скласти «інтегральний показник» $aP + bQ + cR$, обравши дійсні коефіцієнти $a$, $b$ і $c$ на свій розсуд. Чи завжди вони зможуть виконати завдання, тобто зробити так, щоб вигаданий ними інтегральний показник за останні 5 років щороку зростав?

* * *

**Деякі позначення, які використовуються в умовах задач**:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$, $1! = 1$ (факторіал числа $n$); $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число комбінацій із $n$ елементів по $k$, $0 \leq k \leq n$ (біноміальний коефіцієнт); $\max\limits_{1 \leq i \leq n} a_i$ — найбільше серед чисел $a_1$, $a_2$, …, $a_n$; $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ — сума чисел $a_1$, $a_2$, …, $a_n$; $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ — добуток чисел $a_1$, $a_2$, …, $a_n$; $f: X \to Y$ — функція $f$, яка визначена на всій множині $X$ та набуває значень у множині $Y$.

**Матеріали для проведення відбірних етапів турніру підготували**:
О. Т. Гасанова, О. Ю. Евнін (Росія), А. І. Казмерчук, А. М. Корнілов (Росія), О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, І. М. Мітельман, Д. Ю. Мітін, О. Н. Нестеренко, М. О. Перестюк, К. В. Рабець, В. М. Радченко, М. М. Рожкова, Р. В. Скуратовський, О. Ю. Теплінський, О. К. Толпиго, І. В. Федак, І. С. Фещенко, А. М. Фролкін, В. А. Ясінський.