Валентина **Борисова**, *Олександр* **Курченко**, *Катерина* **Рабець**

За доброю традицією кінець жовтня стає святом творчості на плідному ґрунті могутньої науки Математики, своєрідним ярмарком ідей та досягнень освітян-математиків та їх вихованців у розв'язанні непростих дослідницьких завдань та захоплюючому, яскравому змаганні з їх презентації.

Всіх небайдужих до математики

Міністерство освіти і науки України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти
запрошує на

XIII ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

*Завдання для відбірних етапів турніру**

Вельмишановні учасники Турніру! Задачі, що пропонуються нижче, досить складні, і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У деяких ситуаціях вашій команді буде варто поставити і розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної "боротьби", оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру (нехтування ж можливостями узагальнення інколи призводить до втрати балів).

Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. "***Число підмножин***". Знайдіть число підмножин множини $1, 2, ..., n$ (включаючи порожню множину), які: а) не містять жодної пари послідовних чисел; б) не містять жодної трійки послідовних чисел.

2. "***Нерівність Коші-Буняковського***". Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a_1, a_2, ..., a_n;\quad b_1, b_2, ..., b_n$ виконується нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

*** Для проведення шкільних, районних, міських та обласних етапів турніру відповідні журі й оргкомітети можуть частково змінювати запропонований перелік задач.**

причому знак рівності буде тоді й тільки тоді, коли існують дійсні числа $\lambda,\ \mu,$ такі, що $\lambda^2+\mu^2\neq 0$ і $\lambda a_k+\mu b_k=0,\ 1\le k\le n.$

Доведіть нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \le\ n-2\ \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2+2a_1a_2+2a_1a_3+2a_2a_3\right),$$

де $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$, $n\ge 3.$ В якому випадку має місце рівність?

3. "***Вимірювання відстані.***" Відомий наступний спосіб наближеного вимірювання відстані. Нехай, наприклад, спостерігач знаходиться на березі річки у точці C і має на меті виміряти її ширину. Для цього він фіксує точку A на протилежному березі так, щоб кут між лінією берега і прямою CA був близьким до прямого. Потім спостерігач витягує вперед праву руку з піднятим вгору великим пальцем, заплющує ліве око і суміщає піднятий палець з точкою A. Далі, відкриває ліве око, заплющує праве і оцінює відстань між точкою на протилежному березі, на яку вказує палець, і точкою A. Цю відстань множить на 10 і отримує наближене значення відстані до точки A, тобто ширини річки. Обґрунтуйте цей спосіб вимірювання відстані.

4. "***Сума к-тих степенів***". Дослідіть, для яких натуральних показників k сума $1^k+2^k+...+n^k$ ділиться на $1+2+...+n$ для всіх натуральних $n.$

5. "***Добутки чисел Фібоначчі***". Нехай послідовність F_n задається рівностями: $F_1=F_2=1,\ F_{n+1}=F_n+F_{n-1},\ n\ge 2.$ Розглянемо добуток $p_k=F_n\cdot F_{n+1}\cdot...\cdot F_{n+k}$.

А). Доведіть, що для $k=2,\ 3,\ 4$ числа p_k не можуть бути точними квадратами при жодному значенні n. Б). Дослідіть це питання для інших значень k.

В). Дослідіть, чи може бути точним квадратом число $F_1\cdot F_2\cdot...\cdot F_n$.

6. "***Чудові точки всередині трикутника.***" Всередині трикутника ABC знайдіть точки G і H для яких відповідно середнє геометричне і середнє гармонічне відстаней до сторін трикутника набувають максимальних значень.

У яких випадках відрізок GH паралельний до однієї із сторін трикутника? Знайдіть довжину такого відрізка GH.

7. "***Подільність многочленів***". Нехай $m,n-$ натуральні числа.

А). Нехай двочлен x^n-1 ділиться на двочлен $x^m-1.$ Доведіть, що n ділиться на $m.$

Б). Нехай двочлен x^n+1 ділиться на двочлен $x^m+1.$ Доведіть, що $\frac{n}{m}-$ непарне число.

В). Нехай двочлен x^n-1 ділиться на двочлен x^m+1. Доведіть, що двочлен x^n-1 ділиться на двочлен x^m-1.
Г). Нехай тричлен $x^{2n}+x^n+1$ ділиться на тричлен $x^{2m}-x^m+1$. Доведіть, що тричлен тричлен $x^{2n}+x^n+1$ ділиться на тричлен $x^{2m}+x^m+1$.

Узагальніть результати попередніх пунктів для інших многочленів.

8. "***Рівновіддалені точки***". На координатній площині зобразіть множину всіх тих точок $(x;y)$, для яких

$$\max\{|x+1|,|y|\}=\max\{|x-1|,|y|\}.$$

9. "***Кількість розв'язків***". Знайдіть кількість розв'язків рівняння

$$\sqrt{[x]}+\sqrt{\{x\}}=a,$$

де $[x]$ – ціла частина числа x, $\{x\}=x-[x]$ – дробова частина числа x, у залежності від значення параметра $a\in\mathbb{R}$.

10. "***Розбиття***". Представлення натурального числа у вигляді суми натуральних доданків назвемо розбиттям цього числа (наприклад, 15=7+3+3+2). Порядок доданків не враховується, тобто 3=2+1 і 3=1+2 – одне й те саме розбиття.

Через *P(N)* позначимо число всіх розбиттів числа N і нехай $P_k(N)$ – число всіх тих розбиттів числа N, що задовольняють додаткову умову: довільні два доданки розрізняються не більше, ніж на k. Наприклад, розбиття 15=8+7 та 15=4+4+3+2+2 враховуються при підрахунку $P_2(15)$, а 15=7+5+3 – ні. Через $Q_k(N)$ позначимо число всіх тих розбиттів, для яких довільні два доданки розрізняються не більше, ніж на k і всі доданки непарні. А). Знайдіть $P_1(2010)$. Б). Знайдіть $P_1(N)$ для довільного натурального числа N. В). Знайдіть $Q_1(2010)$. Г). Знайдіть $Q_2(2010)$. Д). Знайдіть $P_2(N)$ для довільного натурального числа N. Е). Знайдіть $P_3(N)$ для довільного натурального числа N. Є). Нехай k – фіксоване натуральне число і $P_k(N)$ розглядається як функція N. Доведіть, що існує такий многочлен $f(x)$, що $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{P_k(N)}{f(N)}=1$ та знайдіть степінь многочлена $f(x)$.

11. "***Два факторіали***". Нехай p – просте число. Знайдіть усі натуральні n такі, що число $(p-n)!\,(n-1)!+(-1)^{n-1}$ ділиться на p.

12. "***Дотична до кола***". На площині зображено трикутник ABC і коло ω, яке проходить через вершину C, середини сторін AC та BC і точку перетину медіан трикутника ABC. На колі ω відзначена точка K така, що $\angle AKB = 90°$. Користуючись лише лінійкою, проведіть дотичну до кола ω у точці K.

13. "***Тура на шаховій дошці***". Тура відвідує кожну клітинку шахової дошки рівно один раз і повертається на початкове поле.. За один хід вона переходить на сусідню клітинку (із спільною стороною). А). Таким чином маршрут тури замкнений і являє собою неопуклий многокутник без самоперетинів. Знайдіть його площу (площа однієї клітинки дорівнює 1, маршрут проходить через центри клітинок). Б). Відомо, що тура потрапила на поле b2 з поля a2. З котрого поля вона потрапила на поле h8?

14. "***Найкоротші шляхи***". У задачі йдеться про найкоротші шляхи між точками $A(0;0)$ та $B(n;n)$, складені із відрізків прямих $x = k,\ 0 \le k \le n$ та $y = s,\ 0 \le s \le n.$

Кожний такий шлях – ламана. Вона може містити від двох (таких ламаних дві) до $2n$ (таких ламаних також дві) ланок. Щоб дістатися від A до B уздовж ламаної, складеної з $2n$ ланок, слід змінювати напрям руху на кожному перехресті. Поділимо всі можливі ламані (шляхи від A до B) на класи, в залежності від того, із скількох прямолінійних відрізків вони складені. А). Скільки є ламаних, котрі мають рівно $m,\ 3 \le m \le 6,$ ланок?

Нехай m – натуральне число, $1 \le m \le n.$ Б). Скільки є ламаних, котрі мають рівно $2m-1$ ланок? В). Скільки є ламаних, котрі мають рівно $2m$ ланок?

Маючи числа, котрі визначають кількісний склад усіх класів ламаних, складіть тотожність для біномних коефіцієнтів.

15. "***Центри мас трикутників***". На сторонах трикутника ABC зовнішнім чином побудовані правильні трикутники $ABC_1,\ BCA_1,\ CAB_1$. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників ABC та $A_1B_1C_1$ співпадають.

16. "***Точки на сфері***". Точки A, B, C і D лежать на сфері радіуса 1. Відомо, що виконується така рівність:

$$AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD = \frac{512}{27}.$$

Доведіть, що $ABCD$ – правильний тетраедр.

17. "***Ціна опціона*** "**basket**". Про невід'ємні числа p_{ijk}, де $1 \le i, j, k \le 3$ відомо, що кожна з подвійних сум $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_{ijk}$, $\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_{ijk}$, $\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} p_{ijk}$ дорівнює 1. Для заданого числа $L > 0$ знайти найбільше і найменше значення виразу $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_{ijk}\left(i + j + k - L\right)_{+}$, де $a_{+} = \max\left(a, 0\right)$, $a \in \mathbb{R}$.

18. "***Математика по-гвінейськи***". Маємо 7 словосполучень мовою *сеймат* (одна з 800 мов у Папуа-Новій Гвінеї) та їх переклад у довільному порядку: {tehu ing, huhua seilon, tel seilon, toluhu ing, toluok sinen, tok sinen, huok sinen}, {три собаки, один будинок, дві собаки, один собака, дві людини, одна людина, три будинки}.

А). У першому стовпчику виконані дії з числами, у другому – ті ж дії у тому ж порядку, записані словами:

$\ldots \times 2 = \ldots$	tepanim toluhu × huohu = …;
$3 \times 31 = 93$	… × … = seilon hinalo huopanim toluhu;
$\ldots + \ldots = 17$	huopanim + tepanim huohu = tolupanim huohu;
$\ldots + \ldots = 23$	… + huopanim huohu = seilon tel toluhu;
$\ldots + 60 = \ldots$	… + seilon tohu = seilon tepanim;

Заповніть пропуски.

Б). За поданими матеріалами опишіть систему числівників мовою *сеймат*.

19. "***Рекурентна послідовність***". Послідовність дійсних чисел $\left(a_n\right)$ задається у такий спосіб: $a_0 = \frac{1}{2010}$ і $a_{n+1} = a_n - \arcsin\left(\sin^2 a_n\right)$ для всіх $n \ge 0$. Знайдіть $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n} \cdot a_n\right)$.

20. "***Детермінована гра***". Грають двоє. Перший називає цифру від 2 до 9. Другий множить її на довільну цифру від 2 до 9. Потім перший множить результат на довільну цифру від 2 до 9 і т.д. Виграє той, хто вперше отримає добуток, більший за: 1) 2010; 2) задане число C. Хто виграє при правильній грі: перший гравець чи другий?

Матеріали для проведення відбірних етапів турніру підготували:
В. О. Борисова, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, О. М. Назаренко, О. Н. Нестеренко, М. О. Перестюк, К. В. Рабець, В. М. Радченко, М. М. Рожкова, О. Ю. Теплінський, О. К. Толпиго, А. А. Томусяк, І. В. Федак, В. А. Ясінський.